Exercice 1 : .... 5 points

1. Vérifions si les entiers naturels suivants : 122 ; 99 ; 617 sont des nombres premiers.
   122 est divisible par 2; donc 122 n'est pas un nombre premier.
   99 est divisible par 3; donc 99 n'est pas un nombre premier.
   $\sqrt{617} \approx 24{,}8$
   Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{617}$ sont : 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23, aucun de ces nombres ne divise 617, donc 617 est un nombre premier. **(1,5 pt)**
2. a. Décomposons en produit de facteurs de nombres premiers les entiers naturels suivants : 1512; 1080.

$$\begin{array}{r|l} 1512 & 2 \\ 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1080 & 2 \\ 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\mathbf{1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7}$ **(1 pt)** $\qquad \mathbf{1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5}$ **(1 pt)**

   b. Calculons le $PPCM$ et le $PGCD$ des nombres entiers 1512 et 1080.
   $PPCM(1512;1080) = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 5 = 7560 \Rightarrow \boldsymbol{PPCM(1512;1080) = 7560}$ **(0,5 pt)**
   $PGCD(1512;1080) = 2^3 \times 3^3 = 6^3 = 216 \Rightarrow \boldsymbol{PGCD(1512;1080) = 216}$ **(0,5 pt)**

   c. Rendons irréductible la fraction suivante : $\dfrac{1512}{1080}$

   Première méthdode :
   $$\frac{1512}{1080} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 7}{2^3 \times 3^3 \times 5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{1512}{1080} = \frac{7}{5} \ \textbf{(0,5 pt)}$$

   Deuxième méthdode :
   $$\frac{1512}{1080} = \frac{1512 \div PGCD(1512;1080)}{1080 \div PGCD(1512;1080)} = \frac{1512 \div 216}{1080 \div 216} = \frac{7}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1512}{1080} = \frac{7}{5}}$$

Exercice 2 : .... 5 points

On désigne par C_n le capital dont dispose Agouno l'an $(2019+n)$.

1. Déterminons C_0, C_1 et C_2.
   $\boldsymbol{C_0 = 500\,000F}$ **(1 pt)**
   $C_1 = C_0 + 25000 = 500000 + 25000 = 525000F \Rightarrow \boldsymbol{C_1 = 525000F}$ **(1 pt)**
   $C_2 = C_1 + 25000 = 525000 + 25000 = 550000F \Rightarrow \boldsymbol{C_2 = 550000F}$ **(1 pt)**
2. Pour tout entier n, exprimons C_{n+1} en fonction de C_n puis en fonction de n.
   On a :
   C_0
   $C_1 = C_0 + 25000$
   $C_2 = C_1 + 25000$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{C_{n+1} = C_n + 25000}$ **(0,5 pt)**

(C_n) est une suite suite arithmétique de raison $r = 25000$ et de premier terme $C_0 = 500000$; donc $C_n = C_0 + nr = 500000 + 25000n$

$\boldsymbol{C_n = 500000 + 25000n}$ **(0,5 pt)**

3. On a : $1000000 = 500000 + 25000n \Longrightarrow 25000n = 1000000 - 500000 = 500000$

$$\Longrightarrow n = \frac{500000}{25000} = 20 \Longrightarrow \boldsymbol{n = 20} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Il pourra débuter son affaire en $2019 + 20 = 2039$.

Pour 100000F

$100000 = 500000 + 25000n \Longrightarrow 25000n = 100000 - 500000 = -400000$

$$\Longrightarrow n = -\frac{400000}{25000} = -16 \Longrightarrow \boldsymbol{n = -16}$$

Pour le demarrage de son affaire : $2019 - 16 = 2003$ ce qui est impossible.

Problème : .... 10 points ✍

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ et on note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminons le domaine de définition D_f de f puis les limites de f, aux bornes de cet ensemble.

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R};\ x - 1 \neq 0\}$

Posons $x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$; donc $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} \backslash \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[}$ **(1,5 pt)**

Les limites au bornes de D_f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,5 pt)**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -(+\infty) = -\infty$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ **(0,5 pt)**

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \frac{-1^2 + 2(1) - 1}{1 - 1} = \frac{-1 + 2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}\ FI$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x - 1)^2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} [-(x - 1)] = \lim_{x \to 1} (-x + 1) = -1 + 1 = 0$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0}$ **(0,5 pt)**

2. Déterminons les nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$,

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$

Première méthode : Coefficients indéterminés

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2 + (-a+b)x - b + c}{x-1}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = -1 \\ -a + b = 2 \\ -b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 + a \\ c = -1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{a = -1;\ b = 1;\ c = 0}$ **(1,5 pt)**

Deuxième méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + 2x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 - x} & -x + 1 \\ x - 1 & \\ \underline{-x + 1} & \\ 0 + 0 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = -x + 1 + 0$, donc $\boldsymbol{a = -1;\ b = 1;\ c = 0}$

3. a. Justifions que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptôte à la courbe (C_f).

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} [-x + 1 - (-x + 1)] = 0$$

$\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = 0}$**, donc la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptôte à la courbe (C_f). (1 pt)**

b. Étudions la position de la courbe (C_f) et la droite (D).

$f(x) - y = -x + 1 - (-x + 1) = 0$

$\boldsymbol{\forall x \in D_f,\ f(x) - y = 0 \Rightarrow f(x) = y}$**, donc (C_f) et (D) sont confondues (1 pt)**

4. a. Étudions le signe de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

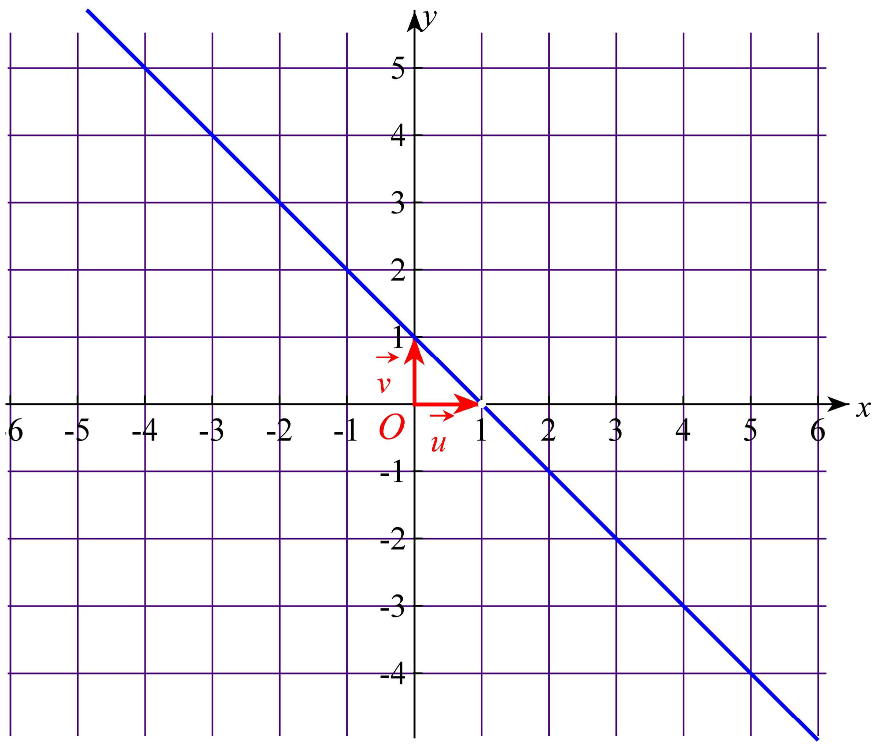
$$f'(x) = \frac{(-2x+2)(x-1) - (-x^2 + 2x - 1)}{(x-1)^2} = -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = -1 \quad \textbf{(1 pt)}$$

$\boldsymbol{\forall x \in D_f,\ f'(x) < 0}$ **(0,5 pt)**

b. Dressons le tableau de variation de f **(1 pt)**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$0 \ \Vert \ 0$	$\searrow$	$+\infty$

5. Traçons la courbe (C_f) et la droite (D) dans le même repère. **(1 pt)**


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
O
$\vec{u}$
$\vec{v}$